Пуассоновский процесс

На основе Пуассоновского процесса можно понять связь между более общими случайными процессами и цепями Маркова. Эта связь основана на задании процесса с помощью независимых приращений. Мы уже встречались с независимыми приращениями, когда изучали Винеровский процесс. В цепях Маркова аналогом независимых приращений является свойство независимости перехода из состояния $X_{t-1} = i$ в состояние $X_t = j$ от переходов в предыдущие моменты времени.

5.1 Вызов такси

Допустим, мы хотим описать поведение n пользователей приложения Мы.Такси. Зафиксируем интервал времени (s, t), например $(00:00 - 01:30)$. Пусть X_i - случайная величина, моделирующая решение пользователя вызвать такси в интервале времени (s, t). Она подчиняется распределению Бернулли с параметром $p(s, t) = P(X_i = 1)$, тогда число вызовов такси в заданный интервал времени можно описать случайной величиной $Y^n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. При большом числе людей нас с позиции более удобной модели может интересовать предельное распределение при $n \to \infty$. Если число пользователей n велико, то нам всего-навсего нужно только устремить n к бесконечности... но не всё так очевидно.

Вообще в теории вероятность вызова такси отдельным человеком может меняться в зависимости от количества людей. Больше людей – меняется физика мира: возможно, это больше город и больше транспортных возможностей, а ещё больше пробок или просто культурно меньше или больше желания куда-то ехать. Но что мы видим в самых разных городах от Парижа через Белград, Москву, Челябинск, Дубаи и до Дели? У вас есть мобильное приложение или телефон таксопарка, в котором в зависимости от страны пребывания такси в основном приезжает примерно одинаково: например, в среднем за 5 минут и нет повода думать, что это зависит от количества людей. В этом смысле рынок адекватно покрывает пользовательский спрос и высокоуровнево количество водителей регулируется исходя из среднего спроса на такси.

Поэтому модельно кажется разумным зафиксировать среднее случайной величины Y_n. А с другой стороны, предположить, что среднее число вызовов линейно зависит от интервала времени и определяется только спросом λ (измеряется в людях/сек, к примеру), который в простейшем случае полагается константой на этом отрезке. В итоге среднее число заказов такси в заданный интервал времени (t, s) получается равно $\lambda(t-s)$. И это предположение уже однозначно определяет предельное распределение.

5.2 Процесс Пуассона

Теорема 5.1. *Пусть $X_i, i = 1, 2, ..., n$ - набор независимых Бернуллиевских случайных величин с параметром $p_n = P(X_i = 1)$. Определим Y_n как число успехов в n независимых испытаниях Бернулли, т.е. $Y_n = \sum\limits_{i=0}^{n} X_i$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P\{Y_n = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)$.*

▷ Для начала запишем распределение случайной величины Y_n при фиксированном n:

$$P(Y_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k \cdot (1-p_n)^{n-k}.$$

Теперь рассмотрим предел при $n \to \infty$ первого множителя:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k!} \cdot n(n-1)...(n-k+1)p_n^k =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k!} 1(1-\frac{1}{n})...(1-\frac{k-1}{n})(np_n)^k = \frac{1}{k!}\lambda^k.$$

Рассмотрим второй множитель:

$$\lim_{n\to\infty} (1-p_n)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \exp[(n-k)\ln(1-p_n)] = \lim_{n\to\infty} \exp[(1-\frac{k}{n}) \cdot n(-p_n)] = \exp(-\lambda).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n = k) = \frac{1}{k!}\lambda^k \exp(-\lambda).$$

□

Определение 5.1. *Распределение вероятностей на дискретном множестве $\mathbb{Z}_+$, задаваемое формулой*

$$p(k;\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp^{-\lambda} \mathbb{1}\{k \geq 0\}, \tag{5.1}$$

называется распределением Пуассона с параметром λ, обозначаемым как $Pois(\lambda)$.

Это распределение нам всем хорошо известно с самого первого знакомства со случайными величинами. Не стоит забывать об изначальных предположениях – при других результат будет другой: в данном случае мы получили сходимость по распределению к распределению Пуассона.

Упражнение 5.1. *(Подумать) Изменится ли результат, если $np_n = \lambda_n$ и $\lambda_n \to \lambda$ при $n \to \infty$? Если будет, какой будет предел (и в каком смысле) в других случаях: $np_n \to 0$ и $np_n \to \infty$? Можно ли говорить о каком-то пределе в случае $p_n = p = const$?*

Поскольку мы изучаем разные модели случайных процессов, процесс Пуассона – это модель, позволяющая отследить динамику клиентских звонков во времени: то, как быстро они приходят и с какими временными интервалами.

Определение 5.2. *Процесс* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *с пространством значений* $\Xi = \mathbb{Z}_+$ *(с сигма-алгеброй* $\mathcal{G} = 2^\Xi$*) называется процессом Пуассона, если*

1. $X_0 = 0$ *почти наверное,*

2. $X_t - X_s \sim Pois(\lambda(t-s))$, *где* $\lambda > 0$ *- параметр (интенсивность),* $0 \le s < t$,

3. *Это процесс с независимыми приращениями.*

По своей сути сечение процесса Пуассона X_t в нашем примере – это количество вызовов такси с момента 0 до момента t.

Согласно инструкции, теорема Колмогорова требует задать согласованным образом меры

$$\nu_{t_1,\dots,t_k}(A_1,\dots,A_k) = P(X_{t_1}\in A_1,\dots,X_{t_k}\in A_k),$$

для $t_1,..,t_k \in T$ и $A_1,..,A_k \in \mathcal{G}$, которые мы будем использовать как конечномерные распределения. Мы можем, зная про независимость приращений, построить меру сначала для упорядоченных моментов времени $0 \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_k$ (примем $t_0 = 0$), а потом потребовать перестановочное свойство, как мы делали в Винеровском процессе. Пусть $\{\eta_i\}_{i-1}^k$ - независимые случайный величины, каждая из которых имеет распределение Пуассона $Pois(\lambda(t_i - t_{i-1}))$. С помощью этих величин мы закодируем приращения процесса Пуассона. Рассмотрим случайный вектор $\eta = (\eta_1, \eta_1+\eta_2, \dots, \eta_1+\dots+\eta_k)$. По определению процесса Пуассона его конечномерное распределение для времен $t_1,\dots t_k$ совпадают с распределениями вектора η.

$$\begin{aligned}
P(X_{t_1}\in A_1,\dots,X_{t_k}\in A_k) = &\\
&= \sum_{z_i\in A_i} P(\eta_1 = z_1, \eta_1+\eta_2 = z_2, \dots, \eta_1+\dots+\eta_k = z_k) =\\
&= \sum_{z_i\in A_i} P(\eta_1 = z_1, \eta_2 = z_2 - z_1 \dots, \eta_k = z_k - z_{k-1}) =\\
&= \sum_{z_i\in A_i} p(z_1;\lambda t_1)p(z_2 - z_1;\lambda(t_2 - t_1))\dots p(z_k - z_{k-1};\lambda(t_k - t_{k-1})).
\end{aligned}$$

Дальше идём, как мы уже привыкли.

1. Для произвольного набора моментов времени (не обязательного упорядоченного) $t_1,\dots t_k$ найдем такую (сортирующую) перестановку σ, что $\sigma(t_1) \le \dots \le \sigma(t_k)$, и зададим меру следующим образом:

$$\nu_{t_1,\dots,t_k}(A_1,\dots A_k) = \nu_{\sigma(t_1),\dots,\sigma(t_k)}(\sigma(A_1),\dots,\sigma(A_k)).$$

2. Пусть $t_1, .., t_k, t_{k+1}$ – упорядченный набор времён и $\Delta t_k := t_{k+1} - t_k$, рассмотрим

$$\begin{aligned}
&\nu_{t_1,..,t_k,t_{k+1}}(A_1, ...A_k, \mathbb{Z}_+) = \\
&= \sum_{z_1 \in A_1, ..., z_{k+1} \in \mathbb{Z}_+} p(z_1; \lambda t_1) p(z_2 - z_1; \lambda \Delta t_1) .. p(z_k - z_{k-1}; \lambda \Delta t_{k-1}) p(z_{k+1} - z_k; \lambda \Delta t_k) = \\
&= \sum_{z_1 \in A_1, ... z_k \in A_k} \left[p(z_1; \lambda t_1) p(z_2 - z_1; \lambda \Delta t_1) ... p(z_k - z_{k-1}); \lambda \Delta t_{k-1}) \sum_{z_{k+1} \in \mathbb{Z}_+} p(z_{k+1} - z_k; \lambda \Delta t_k) \right].
\end{aligned}$$

Рассмотрим последнюю сумму:

$$\begin{aligned}
&\sum_{z_{k+1} \in \mathbb{Z}_+} p(z_{k+1} - z_k); \lambda(t_{k+1} - t_k)) = \sum_{z_{k+1} \in \mathbb{Z}_+} \frac{\lambda^{(z_{k+1} - z_k)}}{(z_{k+1} - z_k)!} \exp^{-\lambda} \mathbb{1}\{z_{k+1} - z_k \geq 0\} = \\
&= \sum_{z_{k+1} - z_k \geq 0} \frac{\lambda^{(z_{k+1} - z_k)}}{(z_{k+1} - z_k)!} \exp^{-\lambda} = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} \frac{\lambda^m}{m!} \exp^{-\lambda} = 1.
\end{aligned}$$

В итоге

$$\begin{aligned}
&\nu_{t_1,...,t_k,t_{k+1}}(A_1, ...A_k, \mathbb{Z}_+) = \\
&= \sum_{z_1 \in A_1, ... z_k \in A_k} p(z_1; \lambda t_1) p(z_2 - z_1; \lambda(t_2 - t_1)) ... p(z_k - z_{k-1}); \lambda(t_k - t_{k-1})) = \\
&= \nu_{t_1,...,t_k}(A_1, ...A_k).
\end{aligned}$$

5.3 Траектории процесса Пуассона

У нашего описания есть одна проблема с точки зрения симуляций: процесс меняется дискретным образом и в промежутке между t_1 и t_2 мы с ненулевой вероятностью можем увидеть $X_{t_2} - X_{t_1} = 2$, например. Что с траекторией произошло посередине (КАРТИНКА)? В случае Винеровского процесса у нас такого вопроса не было, но тут сама физика порождает сомнения: значит ли это, что в какой-то момент пришло одновременно 2 звонка? Или два отдельных звонка в разные моменты времени? Обратимся детальнее к исследованию траекторий.

Утверждение 5.2. *Процесс Пуассона имеет кусочно-постоянную модификацию с разрывами первого рода, причём разрывы размера* 1 *почти наверное и разрывов почти наверное конечное число за конечный промежуток времени.*

▷ Второе можно увидеть сразу из определения: Пуассоновская величина почти наверное принимает конечные значения. Что касается первого, нужно исследовать вероятность

$$P\left(X_{t+h} - X_t = 1 \mid X_{t+h} - X_t > 0\right) = \frac{P\left(X_{t+h} - X_t = 1\right)}{P\left(X_{t+h} - X_t > 0\right)},$$

она будет стремится к 1 при $h \to 0$. □

Получается, что траектория на самом деле имеет скачки размера 1 и не больше. В терминах физической модели это означает, что никогда не будет две заявки на такси в один момент времени и никогда не будет двух клиентов на входе магазина, которые сталкиваются в дверях.

По своей сути траектории процесса Пуассона можно рассматривать ещё как пути на графе $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \mathbb{Z}_+$, при этом переходы между вершинами совершаются не в дискретные моменты времени $t \in \mathbb{Z}_+$, а в непрерывные $t \in \mathbb{R}_+$. Путь на графе, описывающий процесс Пуассона, определяет последовательность вершин $V_0 \neq V_1 \neq V_2 \neq V_3 \ldots$. Заметим, что по определению процесса Пуассона пути на графе начинаются в вершине $V_0 = 0$ почти наверное. Рассуждая в терминах марковских цепей, можно сказать, что начальное распределение сосредоточено в нуле. Более того, согласно нашему результату, путь на графе, соответствующей почти любой реализации процесса Пуассона, является последовательностью $(0, 1, 2, 3, \ldots)$.

Это означает, что если за ξ_i мы обозначим время, проведенное в вершине $V_{i-1} = i - 1$ до перехода в вершину $V_i = i$, то процесс Пуассона можно записать следующим образом:

$$X_t = \sup\{n \geq 0 : \sum_{i \leq n} \xi_i \leq t\}. \tag{5.2}$$

Более того, оказывается, что (ξ_i) – это последовательность независимых и даже одинаково распределённых случайных величин.

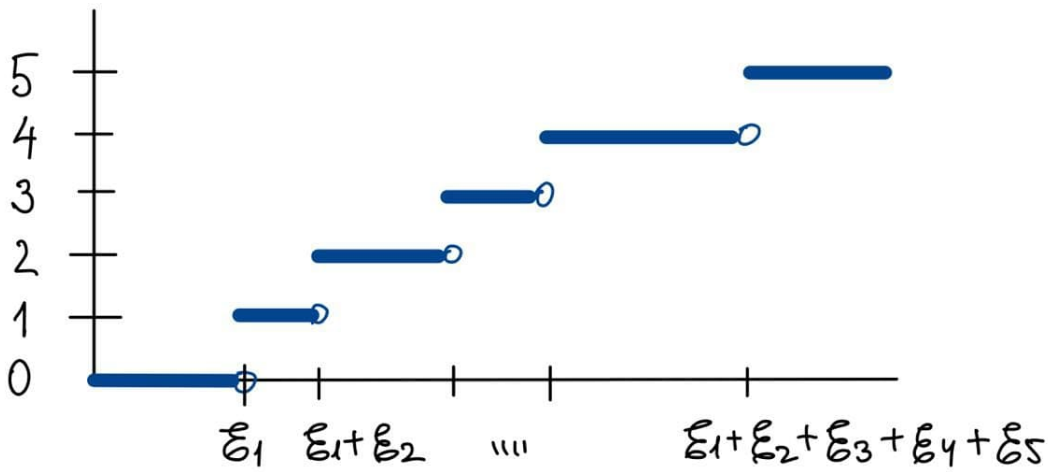

Рис. 5.1: Траектория Пуассоновского процесса

Теорема 5.3. *(Эквивалентное определение процесса Пуассона)*

Процесс Пуассона можно также задать как процесс $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, проводящий случайное время $\xi_i \sim Exp(\lambda)$ в состоянии $i-1$, а затем попадающий в состояние $i \in \mathbb{Z}_+$, т.е.

$$X_t = \sup\{n \geq 0 : \sum_{i\leq n} \xi_i \leq t\},$$

причём ξ_i - независимые случайные величины.

$\triangleright$

Для начала докажем, что из определения процесса Пуассона через моменты скачков следует, что приращения независимые пуассоновские. Запишем распределение для X_t через случайные величины ξ_i:

$$P(X_t = k) = P(\xi_1 + ... + \xi_k < t < \xi_1 + ... + \xi_k + \xi_{k+1}) = P(H_k < t < H_k + \xi_{k+1}).$$

Случайная величина $H_k = \xi_1 + ... + \xi_k$, определяющая время перехода в состояние k, является суммой независимых экспоненциальных случайных величин с параметром λ, а поэтому имеет гамма-распределение с плотностью $f_k(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$. По формуле полной вероятности:

$$P(X_t = k) = \int_0^t P(\xi_{k+1} + x > t > x) f_k(x)dx = \int_0^t e^{-\lambda(t-x)} \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} dx =$$
$$= \frac{\lambda^k e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \int_0^t x^{k-1} dx = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}.$$

Теперь рассмотрим приращения. Здесь нам подойдёт другое более удобное представление:

$$X_t = \sup\{n \geq 0 : \sum_{i\leq n} \xi_i \leq t\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}\left(H_i \leq t\right),$$

в сумме справа единице равны те слагаемые, которые меньше или равны t, по нашей конструкции такая сумма конечна. Тогда приращения для $t > s$

$$X_t - X_s = \sum_{i=X_s+1}^{X_t} \mathbb{1}\left(H_i \leq t\right).$$

При $t > s$ распределение такого приращения будет такое же, как и у X_{t-s}, потому что оба процесса считают скачки за время $t-s$, единственная проблема только в том, что s больше времени последнего случившегося скачка.

Заметим, что процесс времён $(H_k)_{k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ – это процесс с независимыми приращениями. Если (вдруг) $s = H_{X_s}$, то мы действительно просто считаем скачки как с нулевого момента времени, потому что распределения H_m и $H_{k+m} - H_k$ одинаковы для всех k. Время первого скачка после s – это $H_{X_s+1} = H_{X_s} + \xi_{X_s+1}$, сумма двух независимых величин. В случае $s > H_{X_s}$ (что происходит с вероятностью 1) вопрос состоит в том, как устроено время ожидания следующего скачка после какого-то прошедшего времени, то есть,

$$P\left(\xi_{X_s+1} > s - H_{X_s} + h \mid \xi_{X_s+1} > s - H_{X_s}, X_s = x_s\right) = P\left(\xi_{X_s+1} > h \mid X_s = x_s\right) = P\left(\xi_1 > h\right)$$

поскольку ξ_i вне зависимости от индекса все одинаково распределённые. Получается, после времени s время ожидания до следующего скачка распределено так же, как и от момента ближайшего скачка T_{X_s}. Естественно также, что приращения X по этой причине независимы.

Что касается пуассоновости, то из $X_{t-s} \sim X_t - X_s$ и доказанного распределения одного сечения следует пуассоновость приращения.

Теперь докажем утверждение в обратную сторону: если процесс имеет независимые Пуассоновские приращения, то интервалы времени переходов - независимые экспоненциальные случайные величины. Первым шагом определим распределения для приращений за малый интервал времени.

$$\begin{aligned}
&P(X_{t+h} - X_t = k) = \frac{(\lambda h)^k}{k!}\exp(-\lambda h),\\
&P(X_{t+h} - X_t = 0) = \exp(-\lambda h) = 1 - \lambda h + o(h),\\
&P(X_{t+h} - X_t = 1) = (\lambda h)\exp(-\lambda h) = \lambda h + o(h),\\
&P(X_{t+h} - X_t \geq 2) = o(h).
\end{aligned}$$

Вторым шагом, как недавно, рассмотрим вероятность того, что на интервале времени $(0, t]$ нет скачков размера больше 1. Для этого представим интервал $(0, t]$ как объединение $m = t/h$ непересекающихся интервалов длины h. На них приращения независимы. Поэтому эта вероятность равна

$$[P(X_{t+h} - X_t = 0) + P(X_{t+h} - X_t = 1)]^m = [1 - \lambda h + \lambda h + o(h)]^m \to 1, m \to \infty.$$

Последним шагом найдем совместное распределение интервалов меду скачками. Пусть $H_k = \sum_{i=1}^{k} \xi_i$ - время k-го скачка. Тогда плотность совместного распределения для $H_1, H_2, ...H_k$ принимает следующую форму:

$$\begin{aligned}
&f_{H_1,...H_k}(t_1, ...t_k) = \lim_{h\to 0}\frac{P(t_1 < H_1 \leq t_1 + h, ...t_k < H_k \leq t_k + h)}{h^k} =\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{P(X_{t_1} = 0, X_{t_1+h} - X_{t_1} = 1, ...X_{t_k} - X_{t_{k-1}+h} = 0, X_{t_k+h} - X_{t_k} = 1)}{h^k} =\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\exp(-\lambda t_1)\lambda h\exp(-\lambda h)...\exp(-\lambda(t_k - t_{k-1} - h))\lambda h\exp(-\lambda h)}{h^k} =\\
&= \lambda^k\exp(-\lambda t_k).
\end{aligned}$$

Чтобы получить плотность совместного распределения для $\xi_1, ...\xi_k$, достаточно умножить плотность совместного распределения для $H_1, H_2, ...H_k$ на якобиан, который равен 1. Поэтому

$$f_{\xi_1,...\xi_k}(s_1,...s_k) = f_{H_1,...H_k}(s_1,...,s_1+...+s_k) = \lambda^k \exp(-\lambda(s_1+...+s_k)) = \prod_{i=1}^{k}[\lambda \exp(-\lambda s_i)].$$

Это означает, что величины ξ_i являются независимыми и экспоненциально распределёнными. $\square$

Такое задание процесса Пуассона имеет отношение к *считающим процессам*, про них мы ещё будем говорить далее. Поскольку в нашей конструкции $T_k > T_j$ для $k > j$ с вероятностью 1, что даёт ранее полученное свойство траекторий.

Литература

[1] L. Isserlis. On a Formula for the Product-Moment Coefficient of any Order of a Normal Frequency Distribution in any Number of Variables, November 1918.

[2] T. Tao. *An Introduction to Measure Theory.* Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2011.

[3] Ширяев А.Н. Булинский А.В. *Теория случайных процессов.* М:ФИЗМАТЛИТ, 2005.

[4] Синай Я.Г. Коралов Л.Б. *Теория вероятностей и случайные процессы.* МЦНМО, 2013.