№1

Упражнение 1.1. *Докажите, что стохастическая матрица P эргодическая тогда и только тогда, когда*

1. *Из любой вершины в любую есть путь конечной длины с ненулевой вероятностью;*
2. *Не существует периодических состояний. Периодом состояния i называют*

$$\tilde{T} = GCD\{t: \ P(X_t = i | X_0 = i) > 0\},$$

если $T = 1$, то состояние апериодично, иначе периодично с периодом T.

$(\Rightarrow)$

1) P - эргодична $\Rightarrow \exists T: p_{ij}^{(T)} > 0 \ \forall i,j \Rightarrow$ значит $\forall i,j \ \exists$ путь из i в j длины T с вер-стью $p_{ij}^{(T)} > 0$ ✓

2) P - эргодична $\Rightarrow \exists T: p_{ij}^{(T)} > 0 \ \forall i,j \Rightarrow p_{ii}^{(T)} > 0 \ \forall i \Rightarrow T \in \{t \mid P(X_t = i | X_0 = i) > 0\}$

Посмотрим на $T+1$, здесь каждая в-сть $p_{ii}^{(T)}$ станет

$$(P^{T+1})_{ii} = (P \cdot P^T)_{ii} = \sum_k (P)_{ik} \cdot (P^T)_{ki} = \sum_k p_{ik} \cdot p_{ki}^{(T)}$$

$p_{ki}^{(T)}$ — все >0; p_{ik} — в сумме дают 1 $\Rightarrow$ найдется пара $p_{ir} \cdot p_{ri}^{(T)} > 0$

$\Rightarrow$ для $T+1$ $p_{ii}^{(T+1)} > 0 \ \forall i \Rightarrow \{T, T+1\} \subset \{t \mid P(X_t = i | X_0 = i) > 0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow GCD\{t \mid P(X_t = i | X_0 = i) > 0\} = 1 \Rightarrow$ состояние i апериодично ✓

$(\Leftarrow)$

Посмотрим на свойства $GCD\{t \mid P(X_t = i | X_0 = i) > 0\} = S_i$:

если $a \in S_i$ и $b \in S_i$, то $p_{ii}^{(a+b)} = \sum_k p_{ik}^{(a)} p_{ki}^{(b)} \geq p_{ii}^{(a)} \cdot p_{ii}^{(b)} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a + b \in S_i$, т.е. S_i замкнуто по сложению.

По первому свойству S_i не пустое $\Rightarrow \exists a, b \in S_i: GCD(a,b) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{b, 2b, \dots, (a-1)b\} \subset S_i$, при этом они дают все a остатков по модулю a (иначе разность делилась на a)

Рассмотрим $\forall n > (a-1)b$. $n \underset{a}{\equiv} r \Rightarrow n = k_r b + \underbrace{(n - k_r \cdot b)}_{>0}$, где $k_r b \underset{a}{\equiv} r$ и $(n - k_r b) \vdots a$

$\Rightarrow$ все $n > (a-1)b$ лежат в S_i. $\Rightarrow \forall i \ \exists N_i: \forall n > N_i \ p_{ii}^{(n)} > 0$

↓

По первому условию $\exists n_{ij} : p_{ij}^{(n_{ij})} > 0$. Возьмем $n \geq n_{ij} + N_j$, тогда

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik}^{(n_{ij})} \cdot p_{kj}^{(n-n_{ij})} \geq p_{ij}^{(n_{ij})} \cdot p_{jj}^{(n-n_{ij})} > 0$$

Теперь можно просто взять $T = \max\limits_{i,j} (n_{ij} + N_j)$ и $(P^T)_{ij} > 0 \; \forall i,j$ $\square$

Упражнение 1.2. *(2 балла) Найти матрицу перехода за n шагов и инвариантное распределение для марковской цепи, заданной следующей переходной матрицей:*

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Будет ли эта цепь эргодической? (если используете критерий из упражнения 1, без его доказательства решение не засчитывается)

1) Эргодичность:

Воспользуемся критерием из 1.1:

I) На первом шаге есть все переходы кроме $1 \to 2$, $2 \to 3$.

$1 \to 2: \; p_{13} \cdot p_{32} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} > 0$

$2 \to 3: \; p_{21} \cdot p_{13} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} > 0$

II) Все 3 петли ненулевые на первом шаге $\Rightarrow \forall i \; 1 \in S_i \Rightarrow GCD\, S_i = 1$

$\Rightarrow$ цепь эргодическая

2) Инвариантное распределение:

$\pi P = \pi$:

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$\pi_1 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 = \frac{1}{3}(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) = \frac{1}{3}$

$\pi_2 = \frac{2}{3}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi_2 = \frac{1}{3}\pi_3 \Rightarrow \pi_2 = \pi_3$

$\Rightarrow \pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\downarrow$

3) n шагов:

Обозначим $E = (\pi \,|\, \pi \,|\, \pi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Посмотрим на $R = P - E$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $ER = 0$ и $RE = 0$. Также $E^2 = E$.

Тогда $P^n = (E+R)^n = E + R^n$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R^n = \frac{1}{3^{n-1}} R \Rightarrow P^n = E + \frac{1}{3^{n-1}} R = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3^n} & \frac{1}{3} + \frac{1}{3^n} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} + \frac{1}{3^n} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3^n} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Упражнение 1.3. *(2 балла) Пусть $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}_+}$ случайный процесс, принимающий значения в конечном множестве Ξ, такой, что X_t - независимые одинаково распределенные случайные величины. Можно ли задать этот процесс как марковскую цепь? Если да, то как выглядит матрица переходных вероятностей?*

по **Определение 4.1.** *По теореме Колмогорова начальное распределение μ и набор стохастических матриц $(P(t))_{t \in \mathbb{Z}_+}$ задают цепь Маркова, определяемую с помощью согласованного семейства совместных распределений.* достаточно предъявить μ и P, такие что

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, ..., X_n = i_n) = \mu_{i_0} p_{i_0 i_1}(0) p_{i_1 i_2}(1) ... p_{i_{n-1} i_n}(n-1).$$

Обозначим $\pi_i = P(X_t = i)$, $i \in \{1, \dots, r\} = \Xi$

Пусть $\mu_i = \pi_i$, $p_{ij} = \pi_j$ $\forall i, j$

Проверим все необходимые св-ва:

$p_{ij} = \pi_j > 0$ ✓

$\sum\limits_j^r p_{ij} = \sum\limits_j^r P(X_t = j) = 1$ ✓

по нез-сти X_t:

$$P(X_0=i_0, X_1=i_1, \dots, X_n=i_n)=\pi_{i_0}\cdot\pi_{i_1}\cdot\ldots\cdot\pi_{i_n}=\mu_{i_0}\cdot p_{i_0 i_1}\cdot\ldots\cdot p_{i_{n-1} i_n} \quad \square$$

$$P=\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_r \end{pmatrix}$$

Упражнение 1.6. *(Снова в школу) (3 балла) Готфриду Лейбницу (ГЛ, имя изменено) после прочтения последней рукописи Блеза Паскаля (БП, имя изменено) было тяжело уснуть, но когда он заснул, он увидел сон. Он и БП бросали на спор честную монетку из классики теории вероятности: ГЛ ставил на то, что первой выпадет серия из трёх орлов, а БП – на то, что первой выпадет серия орёл-решка-орёл. Чем закончилось, дождаться узнать не удалось, но ГЛ утром стало интересно: у кого из них был выше шанс на победу?*

Обозначим $P(\dots)$ - вероятность победы ГЛ при $\dots$ последних выпавших

О - орел, Р - решка, _ - ничего

$$P(\ )=\frac{1}{2}P(О)+\frac{1}{2}P(\ )$$

$$P(О)=\frac{1}{2}P(ОО)+\frac{1}{2}(ОР)$$

$$P(ОО)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P(ОР)$$

$$P(ОР)=\frac{1}{2}P(\ )$$

Это описывает весь процесс игры. Решаем системку:

$$\frac{1}{2}P(\ )=\frac{1}{2}P(О)$$

$$P(ОО)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}P(\ )$$

$$P(О)=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}P(\ )$$

$$P(\ )=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}P(\ )\right)+\frac{1}{2}P(\ )=\frac{1}{8}+\frac{11}{16}P(\ ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\ )=\frac{2}{5}$$

ГЛ с вер-стью $\frac{2}{5}$ выигрывает.

Упражнение 1.4. *(3 балла) Пусть $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ процесс белого шума из распределения на $\{-1, 1\}$, задающегося*

$$P(Y_t = -1) = P(Y_t = 1) = 1/2.$$

Рассмотрим процесс

$$X_t = \frac{Y_{t+1} + Y_t}{2},\ t > 0.$$

Проверьте, является ли X цепью Маркова согласно конечномерным распределениям.

Покажем, что не выполняется следующее свойство из теоремы 4.1

$$P(X_n = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots X_{n-1} = i) = P(X_n = j | X_{n-1} = i) = p_{ij}(n-1)$$

т.е. например должно выполняться $P(X_3 = 1 | X_2 = 0, X_1 = 1) =$

$= P(X_3 = 1 | X_2 = 0)$

посчитаем $P(X_3 = 1 | X_2 = 0) = \left| X_2 = 0 \Leftrightarrow (Y_2, Y_3) = (1, -1) \text{ или } (-1, 1) \right| =$

$= P(Y_3 = 1 | Y_2 \neq Y_3) \cdot P(Y_4 = 1) = \frac{1}{4}$

Посчитаем $P(X_3 = 1 | X_2 = 0, X_1 = 1)$:

$X_1 = 1 \Rightarrow Y_1 = Y_2 = 1$

$X_2 = 0 \Rightarrow Y_3 = -1$

$X_3 = 1 \Rightarrow Y_4 = 3$ - unlucky $\Rightarrow P(X_3 = 1 | X_2 = 0, X_1 = 1) = 0 \neq \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не цепь Маркова

Упражнение 1.5. *(3 балла) Пусть $G = (V, E)$ - связный неориентированный граф, по которому случайным марковским образом движется агент. Определим вероятность перехода агента из вершины u в вершину v по ребру $(u, v) \in E$ как $p_{uv} = k_u^{-1}$, где k_u - количество вершин, смежных с u. Докажите, что у данной цепи существует инвариантное распределение и найдите его.*

!Обратите внимание, что цепь не обязана быть эргодической.

Рассмотрим $\pi_u = \frac{k_u}{2|E|}$. Проверим свойства:

$$\sum_{u\in V} \pi_u = \frac{1}{2|E|} \sum_u k_u = \frac{2|E|}{2|E|} = 1 \checkmark$$

$\pi P \stackrel{?}{=} \pi$:

$$(\pi P)_v = \sum_{u:(u,v)\in E} \frac{k_u}{2|E|} \cdot \frac{1}{k_u} = \sum_{u:(u,v)\in E} \frac{1}{2|E|} = \frac{k_v}{2|E|} = \pi_u \checkmark$$

$\square$

Упражнение 1.7. *(7 баллов) Случайным блужданием на решётке $\Xi = \mathbb{Z}$ в дискретном времени называют цепь Маркова X, такую, что*

- $X_0 = 0$ *Почти наверное;*
- *переход происходит только в соседние узлы решётки и равновероятно.*

Состояний теперь счётное число, но это не мешает определить цепь Маркова, просто переходная матрица будет бесконечная по двум размерностям. Немного поисследуем.

- *Найдите матожидание $\mathbb{E}[X_t]$, дисперсию и ковариационную функцию процесса (2 балла).*
- *Проверьте, является ли цепь эргодической (2 балла).*
- *Покажите, что все состояния возвратны (3 балла).*

Имеем:

$X_0 = 0$

$P(X_{t+1} = i+1 | X_t = i) = P(X_{t+1} = i-1 | X_t = i) = \frac{1}{2}$

Обозначим $h_t = X_t - X_{t-1}$

$$\mathbb{E} h_t = \frac{1}{2} \cdot +1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$$

$$\mathbb{E} X_t = \sum_{k=1}^{t} \mathbb{E} h_k = \underline{0}$$

$$\mathbb{E} h_t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 = 1$$

$$\mathbb{D} h_t = \mathbb{E} h_t^2 - \mathbb{E}^2 h_t = 1$$

$$\mathbb{D} X_t = \sum_{k=1}^{t} \mathbb{D} h_t = \underline{t}$$

$$\operatorname{cov}(X_s, X_t) = |\text{пусть } t \geq s| = \operatorname{cov}\Big(\sum_{k=1}^{s} h_k, \sum_{k=1}^{s} h_k + \sum_{k=s+1}^{t} h_k\Big) = \mathbb{D} \sum_{k=1}^{s} h_k + \operatorname{cov}\Big(\overbrace{\sum_{k=1}^{s} h_k, \sum_{k=s+1}^{t} h_k}^{\text{нез}}\Big) = s$$

$$\Rightarrow \operatorname{cov}(X_s, X_t) = \underline{\min(s,t)}$$

Эргодичность:

Легко заметить, что для состояния $X_t = 0$ $S_0 = \{t : P(X_t = 0 | X_0 = 0) > 0\} =$

$= \{2, 4, \dots\} \Rightarrow GCD\{t : P(X_t = 0 | X_0 = 0) > 0\} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ <u>не эргодична</u> по упр. 1.1.

↓

Пусть $p := P(\exists t: X_t = i \mid X_0 = i)$ – вер-ть в целом вернуться в начальную позицию.

Заметим, что если мы вернулись в начало, то в-сть вернуться снова точно такая же p в силу симметрии $\Rightarrow$ в-сть вернуться хотя бы n раз $= p^n$

т.е. если N – кол-во возвращений то $\mathbb{E}N = p + p^2 + \ldots = \begin{cases} +\infty, & \text{если } p = 1 \\ \frac{1}{1-p}, & \text{если } p < 1 \end{cases}$

Оценим $\mathbb{E}N$:

$$p_{2n} := P(X_{2n} = i \mid X_0 = i) = C_{2n}^n \frac{1}{2^{2n}}$$

$$\mathbb{E}N = \sum_n^\infty p_n = \sum_n^\infty p_{2n} = \sum_n^\infty C_{2n}^n \frac{1}{2^{2n}}$$

$$(1+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \leq (2n+1) \cdot C_{2n}^n \quad \text{(оценим макс. слагаемым)}$$

$$\Rightarrow \quad 2^{2n} \leq (2n+1) C_{2n}^n$$

$$C_{2n}^n \geqslant \frac{2^{2n}}{2n+1} \Rightarrow P(X_{2n} = i \mid X_0 = i) = C_{2n}^n \cdot \frac{1}{2^{2n}} \geqslant \frac{1}{2n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}N = \sum_{n=1}^\infty C_{2n}^n \cdot \frac{1}{2^{2n}} \geqslant \sum_n^\infty \frac{1}{2n+1} = +\infty \Rightarrow p = 1 \text{ по}$$

$\square$

Упражнение 1.8. *(5 баллов, бонус) Пусть дана цепь Маркова с эргодической матрицей. К ней добавляют состояние x, из которого переход в себя происходит с вероятностью 1 и из как минимум одной вершины оригинального графа есть ориентированное ребро в x с ненулевой вероятностью. Вероятности, где нарушилось условие нормировки, перенормировали. Докажите, что*

1. *Новая цепь эргодическая (то есть, есть инвариантное распределение и цепь к нему сходится на бесконечном времени).*
2. *Для каждого состояния a кроме x новой цепи есть некоторый момент T_a (случайный момент времени), после которого цепь никогда не вернётся в a. Покажите, что T_a почти наверное конечно.*
3. *Покажите, что не существует состояния, кроме x, которое цепь может посетить бесконечное число раз с ненулевой вероятностью.*

Возможно, вам может понадобиться лемма Бореля-Кантелли; подумайте, какие измеримые множества вам подойдут.

1) инв. распр. $\pi = (0, \dots, 0, 1)$

$\pi P_{new} = \pi$, т.к. $P^{new}_{xx} = 1$.

Проверим сх-сть:

$\forall \mu \quad \lim\limits_{s\to\infty} (\mu P^{(s)})_j \overset{?}{=} \pi$ или просто $\forall \mu \lim\limits_{t\to\infty} P(X_t = x) = 1$

Обозначим добавленное ребро p_{vx}.

Исходная цепь эргодична => $\forall i \in \Xi$ $\exists$ конечный путь до v с в-стью >0 и следовательно до x. Обозначим вероятность пути $i \to x$ как δ_i $(\delta_i > 0)$

$\delta := \min\limits_{i \in \Xi} (\delta_i)$, L – максимальная длина пути $i \to x$ по i

Тогда $P(X_L \neq x) \leq 1 - \delta$ и => $P(X_{k \cdot L} \neq x) \leq (1-\delta)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ =>

=> $\lim\limits_{k\to\infty} P(X_{k\cdot L} \neq x) = 0$ => $\lim\limits_{k\to\infty} P(X_{k\cdot L} = x) = 1$ $\square$

2) $\exists$ T_a – п.н. конечно?

$T := \min\{t \mid X_t = x\}$, $\{T = \infty\} := \{\omega \in \Omega : \forall t \ X_t(\omega) \neq x\}$

$\{T > k \cdot L\} := \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \neq x, \dots, X_{k\cdot L}(\omega) \neq x\}$

$\{T = \infty\} = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \{T > k \cdot L\}$, где $\{T > 1 \cdot L\} \supset \{T > 2 \cdot L\} \supset \dots$

$P(T > k \cdot L) = P(X_1 \neq x, \dots, X_{k \cdot L} \neq x) = (1-\delta)^k$ => $P(T = \infty) = \lim\limits_{k\to\infty} (1-\delta)^k$ =>

$\Rightarrow P(T=\infty)=0$, т.е. T — пример такого T_a п.н. конечного.

$\square$

3) $A_t := \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) = a\}$

$a \neq x \Rightarrow A_t \subset \{\omega : X_t \neq x\} \Rightarrow P(A_t) \leq P(X_t \neq x)$

для $t = n\cdot L + m$ — $P(X_t \neq x) \leq P(X_{n\cdot L} \neq x) \leq (1-\delta)^n = (1-\delta)^{\lfloor \frac{t}{L} \rfloor}$

$$\sum_{t=0}^{\infty} P(A_t) \leq \sum_{t=0}^{\infty} (1-\delta)^{\lfloor \frac{t}{L} \rfloor} = L \sum_{n=0}^{\infty} (1-\delta)^n = \frac{L}{\delta} < \infty$$

нужное A: $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \Rightarrow$ по т. Бореля-Кантелли $P(A)=0$

$\square$